

## Теоретические вопросы:

### Алгебра:

1. Определение алгебраической дроби. Основные свойства алгебраических дробей. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю. Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями, с разными знаменателями. Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраической дроби в степень.
2. Определение степени. Свойства степеней. Степени с отрицательным показателем.
3. Формулы сокращенного умножения.
4. Определение квадратного корня. Свойства квадратного корня. График функции  $y = \sqrt{x}$  и его свойства. Внесение множителя под знак корня. Вынесение множителя из-под знака корня.
5. Линейная функция, ее определение и график (с примером).
6. Определение квадратного трехчлена. Способы разложения на множители. Методы нахождения корней неполного квадратного уравнения (два вида). Алгоритм нахождения корней через дискриминант.
7. График квадратичной функции и способы его построения для видов  $y = ax^2 + bx + c$  и  $y = (x - x_0)^2 + y_0$ . Наибольшее и наименьшее значение квадратичной функции, промежутки возрастания.

### Геометрия:

8. Признаки равенства треугольников. Признаки равенства прямоугольных треугольников.
9. Определение, свойства и признаки равнобедренного треугольника.
10. Определение параллельных прямых. Аксиома параллельности (аксиома Остроградского). Теорема о накрест лежащих, соответственных и односторонних углах. Коллинеарные углы.
11. Теорема о сумме углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Теорема о сумме углов выпуклого многоугольника.
12. Определение средней линии треугольника. Свойства и признаки средней линии. Прямая и обратная теорема Фалеса для равных отрезков.
13. Определение окружности. Взаимное расположение двух окружностей. Взаимное расположение прямой и окружности. Теорема о касательной.
14. Окружность вписанная в угол. Теорема о касательных из одной точки.
15. Определения хорды и диаметра. Свойства хорд. Свойство равных хорд.
16. Биссектриса, высота и прямой угол как геометрическое место точек.
17. Определение вписанной окружности треугольника. Построение центра вписанной окружности. Свойство отрезков касательных для вписанной окружности.
18. Определение невписанной окружности треугольника. Построение центра невписанной окружности. Свойство отрезков касательных для невписанной окружности.

**Практические задания:****Алгебраические дроби:**

1.  $\frac{x-2}{5} + \left(\frac{1}{2x-1}\right)^2 \left(\frac{2-x}{1-8x^3} \cdot \frac{1+4x^2+2x}{2x^2+x} - \frac{2+x}{x+4x^3-4x^2}\right)^{-1}$
2.  $\left(\frac{a^2-ba}{b^2+ab} - \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2+ab}\right) \left(\frac{b^2}{a^3-ab^2} + \frac{1}{a+b}\right)^{-1}$
3.  $\frac{1}{x} \left(\frac{y^2-xy}{x+y}\right)^2 \left(\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{x+y}{xy-y^2}\right) + \frac{x}{x+y}$
4.  $\left(\frac{a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{b^2-a^2} + \frac{a}{a+b}\right) \frac{a^2-b^2}{5} \left(\frac{a+b}{15}\right)^{-1} \frac{1}{a-b}$
5.  $\left(a^2-b^2 - \frac{4a^2b-4ab^2}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$
6.  $\frac{x+7}{x+9} + \left(\frac{x+7}{x^2+81-18x} + \frac{x+5}{x^2-81}\right) \left(\frac{x+3}{x-9}\right)^{-2}$
7.  $\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} : \frac{1}{a + \frac{1}{b}} - \frac{1}{b(abc+a+c)}$

**Выражения с радикалами:**

8.  $\frac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}} \cdot \frac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1} \cdot x^{1/4}+1$
9.  $\left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$
10.  $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)^{-1/2}$
11.  $\frac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}} \cdot \frac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1} \cdot x^{1/4}+1$
12.  $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1} + \sqrt[4]{a}\right)^{1/2} \left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1} - \sqrt{a}\right) (a - \sqrt{a^3})^{-1}$
13.  $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$
14.  $\frac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}} - \frac{2}{x^{3/2}} + \frac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}$

**Дробно-рациональные уравнения:**

15.  $\frac{3}{x} + \frac{4}{x-1} = \frac{5-x}{x^2-x}$

16.  $\frac{3y-2}{y} - \frac{1}{y-2} = \frac{3y+4}{y^2-2y}$

17.  $\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x+5} = 2$

18.  $\frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12}$

19.  $\frac{7y-3}{y-y^2} = \frac{1}{y-1} - \frac{5}{y(y-1)}$

20.  $\frac{3}{y-2} + \frac{7}{y+2} = \frac{10}{y}$

21.  $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = 3\frac{1}{3}$

**Уравнения, приводимые к квадратным:**

22.  $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$

23.  $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

24.  $(x+5)^3 = 25(x+5)$

25.  $(x-2)^2(x-3) = 12(x-2)$

26.  $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$

27.  $2x^4 - 19x^2 + 9 = 0$

28.  $(x-5)^4 - 3(x-5)^2 - 4 = 0$

**Признаки равенства треугольников и свойства равнобедренного треугольника:**

29. Кошка сидит на середине лестницы, прислоненной к стене. Концы лестницы начинают скользить по стене и полу. Какова траектория движения кошки?
30. Острый угол прямоугольного треугольника равен  $30^\circ$ . Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят его на три равные части.
31. В прямоугольном треугольнике один из углов равен  $30^\circ$ . Докажите, что в этом треугольнике отрезок перпендикуляра, проведенного к гипотенузе через ее середину до пересечения с катетом, вдвое меньше большего катета.
32. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен  $15^\circ$ . Найдите гипотенузу.
33. В треугольнике  $ABC$  проведены медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и высоты  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$ . Докажите, что длина ломаной  $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$  равна периметру треугольника  $ABC$ .
34. На катетах  $AC$  и  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  вне его построены квадраты  $ACDE$  и  $CBFK$  (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки). Из точек  $E$  и  $F$  на прямую  $AB$  опущены перпендикуляры  $EM$  и  $FN$ . Докажите, что  $EM + FN = AB$ .
35. На катетах  $AC$  и  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  вне его построены квадраты  $ACDE$  и  $CBFK$  (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки),  $P$  — середина  $KD$ . Докажите, что  $CP \perp AB$ .

**Параллельность и сумма углов треугольника:**

36. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на гипотенузе  $AB$  взяты точки  $K$  и  $M$ , причем  $AK = AC$  и  $BM = BC$ . Найдите угол  $MCK$ .
37. На сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  построены внешним образом правильные треугольники  $BCK$  и  $DCL$ . Докажите, что треугольник  $AKL$  правильный.
38. На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярны сторонам исходного треугольника. В каком отношении каждая из взятых точек делит сторону исходного треугольника?
39. Точка  $K$  — середина стороны  $AB$  квадрата  $ABCD$ , точка  $L$  расположена на диагонали  $AC$ , причем  $AL : LC = 3 : 1$ . Найдите угол  $KLD$ .
40. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противоположную сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Докажите, что эта биссектриса также равна основанию треугольника.
41. Высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части. Найдите углы треугольника.
42. В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $20^\circ$ , угол  $C$  равен  $40^\circ$ . Биссектриса  $AD$  равна 2. Найдите разность сторон  $BC$  и  $AB$ .

**Касательная к окружности:**

43. Две окружности касаются внешним (внутренним) образом. Докажите, что сумма (разность) их радиусов равна расстоянию между центрами. Верно ли обратное?
44. Окружность с центром  $O$  касается в точке  $A$  внутренним образом большей окружности. Из точки  $B$  большей окружности, диаметрально противоположной точке  $A$ , проведена хорда  $BC$  большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке  $M$ . Докажите, что  $OM \parallel AC$ .
45. Окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом в точке  $K$ . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках  $A$  и  $B$  и пересекает их общую касательную, проходящую через точку  $K$ , в точке  $M$ . Докажите, что  $\angle O_1MO_2 = \angle AKB = 90^\circ$ .
46. В острый угол, равный  $60^\circ$ , вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен  $r$ . Найдите радиус большей окружности.
47. Две окружности касаются внутренним образом. Известно, что два радиуса большей окружности, угол между которыми равен  $60^\circ$ , касаются меньшей окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.
48. Две окружности касаются в точке  $A$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , пересекает эти окружности вторично в точках  $B$  и  $C$  соответственно. Докажите, что касательные, проведенные к этим окружностям в точках  $B$  и  $C$ , параллельны.
49. В четырехугольнике  $MNPQ$  расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон  $MN, NP$  и  $PQ$ , а другая — сторон  $MN, MQ$  и  $PQ$ . Точки  $B$  и  $A$  лежат соответственно на сторонах  $MN$  и  $PQ$ , причем отрезок  $AB$  касается обеих окружностей. Найдите сторону  $MQ$ , если  $NP = b$  и периметр четырехугольника  $BAQM$  больше периметра четырехугольника  $ABNP$  на  $2r$ .

**Текстовые задачи:**

50. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 42 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 28 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт  $B$  одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.
51. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 4 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?
52. Из пункта  $A$  и пункт  $B$ , расстояние между которыми 72 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 18 км больше, чем велосипедист. Найдите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт  $B$  на 2 часа позже мотоциклиста.
53. Имеется два сосуда. Первый содержит 50 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 10% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 13% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?
54. Катер в 10:00 вышел из пункта  $A$  в пункт  $B$ , расположенный в 30 км от  $A$ . Пробыв в пункте  $B$  2 часа 30 минут, катер отправился назад и вернулся в пункт  $A$  в 18:00 того же дня. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость катера равна 11 км/ч.
55. Игорь и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?
56. Из городов  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми равно 300 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 2 часа на расстоянии 180 км от города  $B$ . Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города  $A$ .

**Линейная функция и ее график:**

57. Постройте график функции  $y = \frac{-x^2 + 6x - 8}{2 - x}$ . При каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения?
58. Постройте график функции  $y = \frac{x^2 - 4}{8 - 4x}$  и найдите ее область значений.
59. Постройте график функции  $y = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{2x - x^2}$ . При каких значениях  $x$  выполняется неравенство  $y < 3$ ?
60. Запишите уравнение прямой, которая параллельна прямой  $y = -1.5x + 4$  и проходит через точку  $C(7; -2.5)$ .
61. Прямая  $y = kx + b$  пересекает ось  $y$  в точке  $(0; 12)$  и проходит через точку  $(4; 22)$ . Запишите уравнение этой прямой. В какой координатной четверти нет точек этой прямой?
62. Выясните, проходят ли прямые  $3x - y = 4$ ,  $2x + y = 6$  и  $2x - y = 2$  через одну точку.
63. Выясните, лежат ли на одной прямой точки  $(8; 12)$ ,  $(10; 18)$  и  $(10; 42)$ .

**Квадратичная функция и ее график:**

64. Постройте график функции  $y = -x^2 - 4x$ . При каких значениях  $x$  функция принимает значения, меньшие 0.
65. Постройте график функции  $y = x^2 - 2x - 3$ . Какие значения принимает функция, если  $0 < x < 3$ .
66. Постройте график функции  $y = -x^2 - 6x - 5$ . Укажите промежутки возрастания и убывания функции.
67. Постройте график функции  $y = \frac{x^3 - x}{x - 1}$ . При каких значениях  $x$  значения функции положительны.
68. Парабола  $y = -3x^2 + c$  пересекает ось  $x$  в точке  $(2; 0)$ . Найдите значение  $c$  и определите, пересекает ли эта парабола прямую  $y = 5$ .
69. Постройте график функции  $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - x - 2}$ . При каких значениях  $t$  прямая  $y = t$  имеет с графиком данной функции одну общую точку?
70. Известно, что прямая, параллельная прямой  $y = -4x$ , касается параболы  $y = x^2 + 1$ . Вычислите координаты точки касания.